4°) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} F(t)dt$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n \leq 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} t\ln(t)\,dt$.

d) Vérifier alors que pour tout $n \in IN^*$, $u_n = \frac{3+2\ln(n)}{4n^2} - \frac{3}{4}$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°4 : 40' 6 points

Soit la fonction f définie sur IR_+^* par $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

1°) a) Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$ puis Etudier les variations de f et tracer C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de C_f et la droite Δ d'équation : $y = x$.

2°) a) Soit g la restriction de f à $[1,+\infty[$; montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J qu'on précisera .

b) Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère que C_f.

3°) Soit la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^{f(x)} x - g^{-1}(t)\,dt$, et on désigne par H la primitive de la fonction g^{-1} sur J qui s'annule en 1.

a) Vérifier que $F(x) = x(f(x)-1) - H(f(x))$.

b) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout réel x de $[1,+\infty[$: $F'(x) = f(x) - 1$.

c) En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$: $F(x) = \int_1^x f(t) - 1\,dt$, puis calculer $F(e)$.

d) Calculer alors l'aire du domaine limité par $C_{g^{-1}}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $x = 1$ et $x = 1 + \frac{1}{e}$.

4°) Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$, pour $n \geq 0$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrer que u est décroissante, en déduire qu'elle est convergente puis calculer sa limite.

c) Soit V la suite définie sur IN par : $V_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(f(u_k))$; établir que $V_n = 1 - \ln(u_{n+1})$ calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn